

Universidad Nacional de Colombia - Facultad de Minas

Curso de Control III

Ejercicio ilustrativo

Creado por: Ing. Jairo Espinosa M.Sc. Ph.D. jjespino@unalmed.edu.co

Fecha: Septiembre 2006

Introducción

El presente ejercicio pretende aplicar los principales elementos estudiados a lo largo del curso de Control Multivariable. Este es un documento que recibe continuas actualizaciones y la idea es que el lector (estudiante) a través de un estudio activo (reproduciendo estos resultados) encuentre preguntas nuevas y logre el objetivo de aprender a diseñar controladores multivariables. Envíe sus preguntas a mi correo electrónico.

La planta

La planta utilizada en este ejemplo es un reactor tanque agitado (CSTR - Continuous Stirred Tank Reactor). La reacción química que tiene lugar en el reactor convierte de manera irreversible el componente A en un componente B. $A \rightarrow B$. Esta reacción es irreversible y tiene lugar en un tanque cilíndrico agitado con una capacidad total de $V_{max} = 120$ litros. El tanque es cilíndrico con una sección de $A = 0.2 \text{ m}^2$.

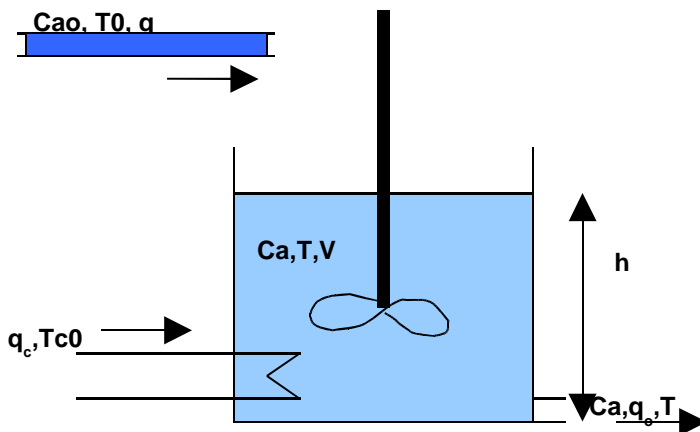


Figura 1 Diagrama de un reactor de tanque agitado

El reactante entra al sistema con un flujo $q(t)$, una temperatura $T_0=350 \text{ K}$ y una concentración de producto A $C_{a0} = 1 \text{ mol/l}$. El reactor tiene un volumen instantáneo

$V(t)$, una temperatura $T(t)$ y una concentración de producto A $Ca(t)$. El fluido deja el reactor con un caudal $q_o(t)$ y una concentración y una temperatura igual a las que existen en el reactor. Ya que la reacción es exotérmica el sistema requiere refrigeración para controlar la reacción. Un serpentín de refrigeración con agua $T_{co} = 350\text{K}$ y con caudal $q_c(t)$ es utilizado para controlar la temperatura del reactor.

El sistema se puede describir usando las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dCa(t)}{dt} = \frac{q(t)}{V(t)}(Ca_0 - Ca(t)) - k_0 Ca(t) e^{-\frac{E}{RT(t)}}$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{q(t)}{V(t)}(T_0 - T(t)) + k_1 Ca(t) e^{-\frac{E}{RT(t)}} + k_2 \frac{q_c(t)}{V(t)} \left(1 - e^{-\frac{k_3}{q_c(t)}} \right) (T_{C0} - T(t))$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = q(t) - k_4 \sqrt{V(t)}$$

Los valores de las constantes están dados por:

$$k_1 = -\frac{\Delta H k_0}{\rho C_p}, \quad k_2 = \frac{\rho_c C_{pc}}{\rho C_p}, \quad k_3 = \frac{h_a}{\rho_c C_{pc}},$$

Parámetro	Descripción	Valor Nominal
k_0	Constante de velocidad de reacción.	$7.2 \times 10^{10} \text{ min}^{-1}$
k_4	Constante de la válvula de salida del tanque	$10 \text{ l}/(\text{min m}^{3/2})$
E/R	Energía de activación	$1 \times 10^4 \text{ K}$
T_0	Temperatura del flujo del reactante	350 K
T_{C0}	Temperatura del liquido refrigerante	350 K
ΔH	Calor de la reacción	$-2 \times 10^5 \text{ cal/mol}$
C_p, C_{pc}	Calores específicos	1 cal/g/K
ρ, ρ_c	Densidad de los líquidos	$1 \times 10^3 \text{ g/l}$
h_a	Coefficiente de transferencia de calor	$7 \times 10^5 \text{ cal/min/K}$
Ca_0	Concentración de producto A en la alimentación del reactor	1 mol/l

Tabla 1 Parámetros del reactor

Los flujos $q_c(t)$ (refrigerante) y $q(t)$ (materia prima) están limitados a un valor máximo $q_{cmax} = q_{max} = 120 \text{ l/min}$.

Definición del problema de Control

Se requiere controlar el reactor mostrado en la sección anterior de forma que la concentración Ca y el volumen V se puedan fijar en valores deseados. Los flujos $q_c(t)$ (refrigerante) y $q(t)$ (materia prima) son las variables que se pueden manipular. El objetivo es controlar el sistema alrededor de un punto de operación definido como:

Variable	Valor en el punto de operación
Ca	0.1 mol/l
V	100 l
q	100 l/min
q_c	103.37 l/min
T	438.54 K

Tabla 2 Punto de operación del Reactor

Si suponemos que solo podemos medir las variables Ca y V , nuestro sistema quedará definido de la siguiente manera:

Estados: $Ca(t)$, $T(t)$, $V(t)$

Salidas: $Ca(t)$ y $V(t)$

Entradas: $q(t)$ y $q_c(t)$

Se espera que el sistema en lazo cerrado presente un sobreimpulso inferior al 10% y un tiempo de establecimiento de 7 minutos. Observe que el sistema está descrito con el tiempo en minutos.

Linealización del sistema

Aplicando el concepto de series de Taylor se puede linealizar el sistema alrededor del punto de operación mostrado en la Tabla 2.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

$$\approx f(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x^*} (x - x^*) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{u^*} (u - u^*)$$

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x^*}, \quad B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{u^*}$$

$$x = \begin{bmatrix} Ca(t) \\ T(t) \\ V(t) \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} q(t) \\ q_c(t) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} Ca(t) \\ V(t) \end{bmatrix}$$

Calculando la linealización sobre el sistema descrito en el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{q^*}{V^*} - k_0 e^{-\frac{E}{RT^*}} & -k_0 Ca(t) \frac{E}{RT^{*2}} e^{-\frac{E}{RT^*}} & -\frac{q^*}{V^{*2}} (Ca_0 - Ca^*) \\ k_1 e^{-\frac{E}{RT^*}} & -\frac{q^*}{V^*} + k_1 Ca^* \frac{E}{RT^{*2}} e^{-\frac{E}{RT^*}} - \dots & -\frac{q^*}{V^{*2}} (T_0 - T(t)) - \dots \\ \dots k_2 \frac{q_c^*}{V^*} \left(1 - e^{-\frac{k_3}{q_c^*}}\right) & & \dots k_2 \frac{q_c^*}{V^{*2}} \left(1 - e^{-\frac{k_3}{q_c^*}}\right) (T_{C0} - T^*) \\ 0 & 0 & -\frac{k_4}{2\sqrt{V^*}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{Ca_0 - Ca^*}{V^*} & 0 \\ \frac{T_0 - T^*}{V^*} & \frac{k_2}{V^*} \left(1 - e^{-\frac{k_3}{q_c^*}}\right) (T_{C0} - T^*) - \frac{k_2 k_3}{q_c^* V^*} e^{-\frac{k_3}{q_c^*}} (T_{C0} - T^*) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) \approx y^* + C(x - x^*) + D(u - u^*)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 438.54 \\ 100 \end{bmatrix}, u^* = \begin{bmatrix} 100 \\ 103.37 \end{bmatrix}, y^* = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

La anterior derivación es sencilla desde el punto de vista conceptual, sin embargo, el cálculo de este tipo de derivadas de forma manual puede en algunos casos ser tedioso y susceptible de error. Por ello le recomiendo que para sistemas muy complejos utilice herramientas computacionales como *Maple* o el *Symbolic Math Toolbox* de *Matlab* para realizar este cálculo. Otra alternativa es utilizar funciones tales como `linmod` que permite linealizar modelos en *Simulink*, sin embargo, esta última función puede generar confusión desde el punto de vista conceptual, dado que esta función linealiza todos los estados presentes en el modelo y genera matrices relacionadas con todas las salidas señaladas en el modelo, aún sin que ellas sean físicamente medibles.

Un ejemplo de linealización analítica del anterior problema se puede calcular usando el *Symbolic Math Toolbox* de *Matlab* de la siguiente forma:

```

syms Ca q V Ca0 k0 ER T T0 k1 k2 qc Tc k3 k4

system = [ (q/V)*(Ca0-Ca)-k0*Ca*exp(-ER/T);
           (q/V)*(T0-T)+k1*Ca*exp(-ER/T)+k2*(qc/V)*(1-exp(-k3/qc))*(Tc-T);
           q-k4*sqrt(V) ]

states = [Ca T V]

inputs = [q qc]

A = jacobian(system,states)

B = jacobian(system,inputs)

```

Figura 2 Derivación analítica usando el toolbox de Math Symbol de Matlab

Calculando los valores de las matrices del sistema se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} -9.9979 & -0.046787 & -0.009 \\ 1799.6 & 7.3245 & 1.7999 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{MERGEFORMAT } B = \begin{bmatrix} 0.009 & 0 \\ -0.8854 & -0.8775 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En este punto le sugiero que haga lo siguiente:

- 1) Implemente el modelo dado en la ecuación en simulink.
- 2) Calcule de forma analítica en Matlab la linealización, preste mucha atención al significado de la linealización recuerde que este texto no es auto contenido y es necesario que estudie la guía del curso.
- 3) Simule el sistema aplicando una pequeña perturbación aleatoria en q_c esa perturbación debe tener una amplitud de 3 o 4 l/min, recuerde usar el valor nominal de q_c .
- 4) Implemente una simulación con el sistema lineal descrito por la matrices y aplique la misma perturbación, las respuestas deben ser muy parecidas, no olvide sumar los valores de y^* a las salidas y de restar u^* a las entradas.
- 5) **PREGUNTE LO QUE NO ENTIENDA.** Recuerde que no es obligatorio hacer estos ejercicios ni rendir informe, lo importante es que pueda preparar su evaluación.

Análisis de Controlabilidad y Observabilidad

Calculando a partir de la ecuación las matrices con Controlabilidad y Observabilidad obtenemos:

$$Co = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$
$$Co = \begin{bmatrix} 0.0090 & 0 & -0.0576 & 0.0411 & 0.0414 & -0.1098 \\ -0.8854 & -0.8775 & 11.5111 & -6.4272 & -20.1645 & 26.8069 \\ 1.0000 & 0 & -0.5000 & 0 & 0.2500 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\text{rank}(Co) = 3$$

Lo que implica que el sistema es controlable. Para la observabilidad se obtiene:

$$Ob = [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T$$
$$Ob = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9.9979 & -0.0468 & -0.0090 \\ 0 & 0 & -0.5 \\ 15.7616 & 0.1251 & 0.0103 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$
$$\text{rank}(Ob) = 3$$

Lo que implica que el sistema es observable.

En este punto le sugiero que haga lo siguiente:

- 1) Reproduzca los resultados obtenidos en este punto usando MATLAB
- 2) Aplique otros métodos de prueba de controlabilidad y observabilidad como PBH (Popov Belevitch y Hautus)
- 3) PREGUNTE LO QUE NO ENTIENDA. Recuerde que no es obligatorio hacer estos ejercicios ni rendir informe, lo importante es que pueda preparar su evaluación.

Análisis de Ganancias Relativas (RGA)

Usando la linealización del sistema expresada por las matrices de la ecuación se puede calcular la ganancia del sistema usando la expresión:

$$G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B + D$$

Es importante recordar que el análisis de ganancias relativas se debe realizar a dos valores distintos de frecuencia:

- Se debe realizar a frecuencia cero ($\omega = 0$ rad/s) para entender la influencia de las variables manipuladas en las variables controladas cuando se realiza control manual.
- Se debe realizar a la frecuencia esperada de crossover ($\omega = \omega_n$ rad/s) para entender la influencia de las variables manipuladas en las variables controladas cuando se realiza control automático.

Tomando $T_s = 7$ min y $M_p = 1.1$ si aproximamos la respuesta como una respuesta de segundo orden tendremos:

$$M_p = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \zeta = \frac{[\ln(M_p - 1)]^2}{[\ln(M_p - 1)]^2 + \pi^2} = 0.5912$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{4}{t_s\zeta} = 0.9666 \text{ rad/min}$$

usando esos valores de frecuencia obtenemos las siguientes ganancias:

$$G(0) = \begin{bmatrix} -0.0056 & 0.0037 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(j0.9666) = \begin{bmatrix} -0.0032 + j0.0028 & 0.0038 - j0.0010 \\ 0.4222 - j0.8162 & 0 \end{bmatrix}_1$$

calculando las matrices de ganancias relativas se obtiene:

$$RGA(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$RGA(j0.9666) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con las reglas de selección estudiadas:

“Las reglas de selección se pueden resumir de la siguiente manera:

- 1- Trate de hacer lazos con aquellos elementos en los cuales el $RGA(G(j\omega_c))$ lo más cercano posible al punto $1+j0$ en el plano complejo.
- 2- Evite hacer lazos con aquellos pares que tienen valores negativos de ganancia relativa en estado estable $RGA(G(0))$.”

Ambos criterios se cumplen perfectamente si se hacen controles con los pares entre la entrada 1 ($q(t)$) y la salida 2 $V(t)$ y entre la entrada 2 ($q_c(t)$) y la salida 1 $Ca(t)$.

En este punto le sugiero que haga lo siguiente:

- 1) Reproduzca los resultados obtenidos en este punto usando MATLAB
- 2) Cambie la matriz C del sistema por $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de manera que las salidas sean concentración y temperatura y repite el análisis de RGA. Observe la contradicción entre los resultados a frecuencia cero y a la frecuencia de crossover.
- 3) PREGUNTE LO QUE NO ENTIENDA. Recuerde que no es obligatorio hacer estos ejercicios ni rendir informe, lo importante es que pueda preparar su evaluación.

¹ Observe que la frecuencia se dejó en rad/min y no en rad/seg, esto debido a que el modelo está escalizado en minutos.

Cálculo de Controladores PID sin desacople

Usando el flujo $q(t)$ para controlar el volumen en el reactor $V(t)$ y $q_c(t)$ el flujo de refrigerante para controlar la concentración $Ca(t)$, se diseñó un par de controladores PID. Los controladores se sintonizaron en el siguiente orden primero el que controla el volumen y luego el que controla la concentración.

El esquema de conexión de los controladores se puede observar en la Figura 3. Observe que a la señal de actuación de los PIDs se le añade el valor constante alrededor del cual se hizo la linealización. Los valores obtenidos para los PID usando sintonización manual fueron:

	K_p	T_i	T_d
Lazo de Volumen	1	1	0
Lazo de Concentración.	50	0.333	0.2

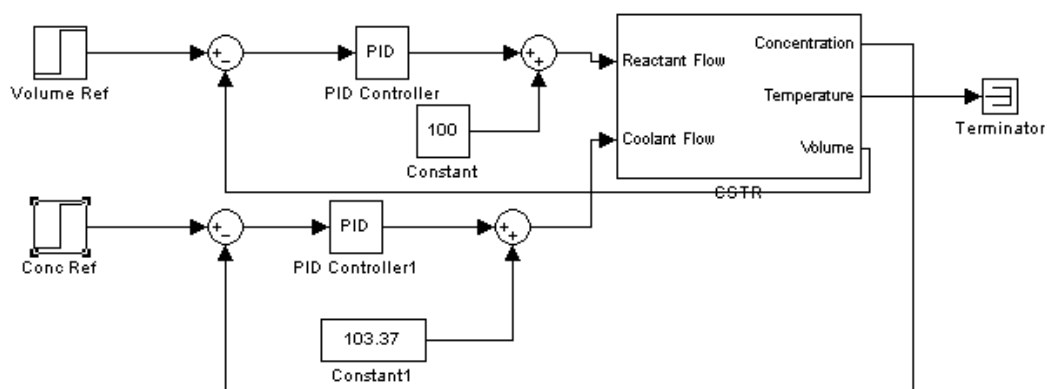


Figura 3 Diagrama de conexión de los controladores PID sin desacoplador

Se aplicaron señales tipo paso después de 10 minutos para llevar el nivel de 100 a 110 litros y a los 50 minutos para llevar la concentración de 0.1 mol/l a 0.11 mol/l.

En la figura se observa que después de sintonizados los PIDs el cambio en el nivel genera un impacto en la concentración, sin embargo un cambio en concentración no afecta el nivel. Si queremos reducir este impacto podremos construir un desacoplador estático y recalculer los PIDs.

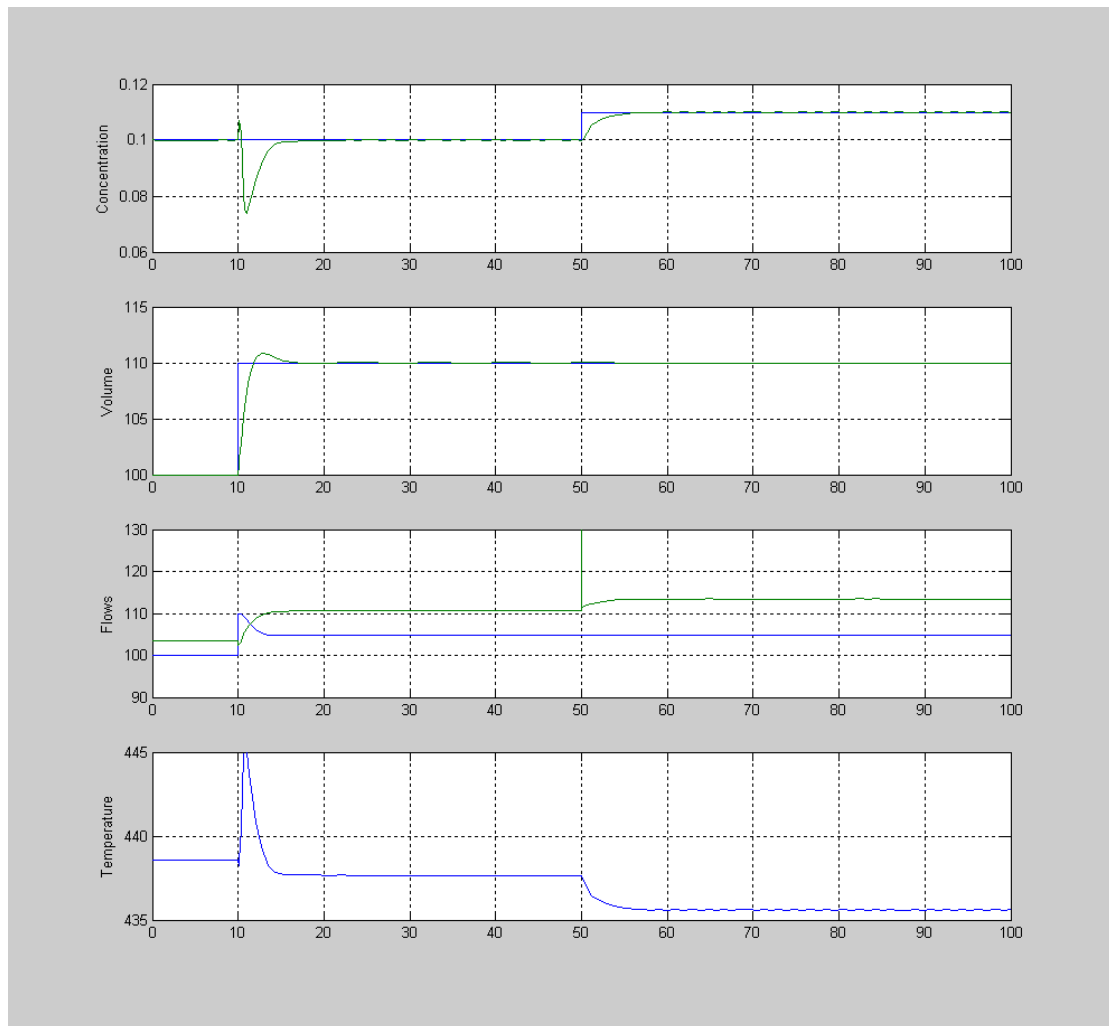


Figura 4 Resultados de la simulación de sistema controlado con dos PID's sin desacople²

En este punto le sugiero que haga lo siguiente:

- 1) Experimente cambiando los parámetros de los PID en el archivo `CSTRCoupledPID.mdl` antes de correr esta simulación debe ejecutar el archivo `cstrinit.m` para inicializar los parámetros del simulador.
- 2) Trate de hacer su propia sintonización (Estoy seguro que con un poco de esfuerzo podrá obtener algo mejor!!)
- 3) **PREGUNTE LO QUE NO ENTIENDA.** Recuerde que no es obligatorio hacer estos ejercicios ni rendir informe, lo importante es que pueda preparar su evaluación.

Cálculo de Controladores PID usando desacoplador.

Si observamos la ganancia estática del sistema

² El archivo de simulink `CSTRCouplePID.mdl` contiene los elementos necesarios para reproducir esta simulación.

$$G(0) = \begin{bmatrix} -0.0056 & 0.0037 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

es imposible aplicar las formulas estudiadas en el curso para diagonalizar este sistema, ya que las fórmulas, requieren que los elementos en la diagonal principal sean distintos de cero. Hay dos opciones una es recalcular una formula para un desacoplador que no divida por los elementos de la diagonal principal o intercambiar las entradas de modo que la ganancia en la diagonal principal sea distinta de cero. Que es lo que haremos en las siguientes líneas:

$$G(s) = Ca \begin{matrix} q & q_c \\ \left[\begin{matrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{matrix} \right] \\ V \end{matrix}$$

Intercambiando las columnas de $G(s)$ se obtiene:

$$G'(s) = Ca \begin{matrix} q_c & q \\ \left[\begin{matrix} G_{12} & G_{11} \\ G_{22} & G_{21} \end{matrix} \right] \\ V \end{matrix}$$

En este caso

$$G'_{11}(s) = G_{12}(s) = \frac{Ca(s)}{q_c(s)}$$

$$G'_{12}(s) = G_{11}(s) = \frac{Ca(s)}{q(s)}$$

$$G'_{21}(s) = G_{22}(s) = \frac{V(s)}{q_c(s)}$$

$$G'_{22}(s) = G_{21}(s) = \frac{V(s)}{q_c(s)}$$

Si calculamos la expresión a frecuencia cero:

$$G'(0) = \begin{bmatrix} 0.0037 & -0.0056 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Con esta descripción podremos construir un desacoplador usando la fórmula:

$$D'(s) = \begin{bmatrix} 1 & -G'_{12}(s)/G'_{11}(s) \\ -G'_{21}(s)/G'_{22}(s) & 1 \end{bmatrix}$$

ya que el desacoplador es estático se obtiene:

$$D'(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1.4878 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que este desacoplador nos relaciona dos entradas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ que estarán acopladas con $q_c(t)$ y $q(t)$.

$$D'(s) = \begin{matrix} & f_1 & f_2 \\ q_c & \begin{bmatrix} D'_{11}(s) & D'_{12}(s) \\ D'_{21}(s) & D'_{22}(s) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

si queremos que el desacoplar funcione con nuestro sistema original $G(s)$, bastará con intercambiar las filas del desacoplador.

$$D(s) = \begin{matrix} & f_1 & f_2 \\ q_c & \begin{bmatrix} D'_{21}(s) & D'_{22}(s) \\ D'_{11}(s) & D'_{12}(s) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.4878 \end{bmatrix}$$

Comprobamos la condición de desacople, calculando el producto

$$G(0)D(0) = \begin{bmatrix} 0.0037 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Efectivamente el sistema queda reducido a un sistema desacoplado. La sintonización de los PIDs es ahora más simple ya que los efectos debidos a los otros lazos son menores, permitiendo una mayor libertad en el momento de sintonizar el sistema.

Los parámetros de los PIDs para el sistema desacoplado quedan resumidos en la siguiente tabla:

	K_p	T_i	T_d
Lazo de Volumen	1	1	0
Lazo de Concentración.	200	2	2.5

El esquema de conexión de los PIDs y el desacoplador se muestra en la Figura 5

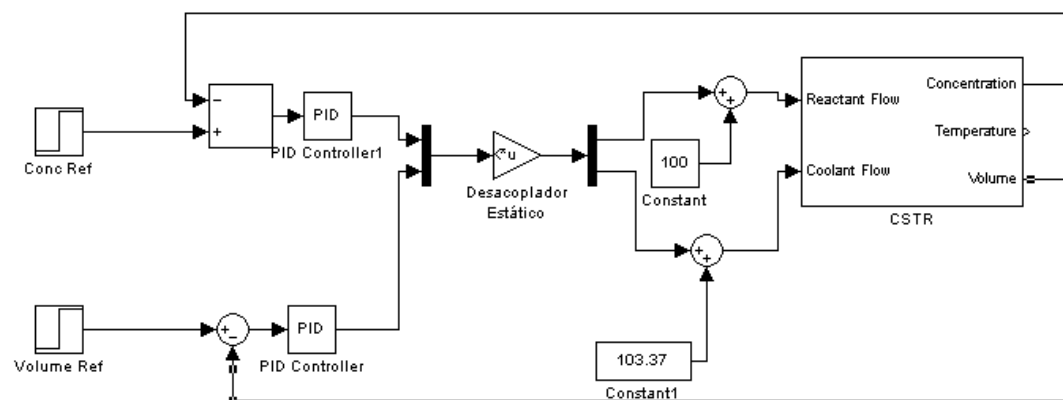


Figura 5 Sistema controlado con desacoplador y PID³

³ El archivo de simulink CSTRDeCouplePID.mdl contiene los elementos necesarios para reproducir esta simulación.

La Figura 6 muestra los resultados de la simulación del sistema con el desacoplador.

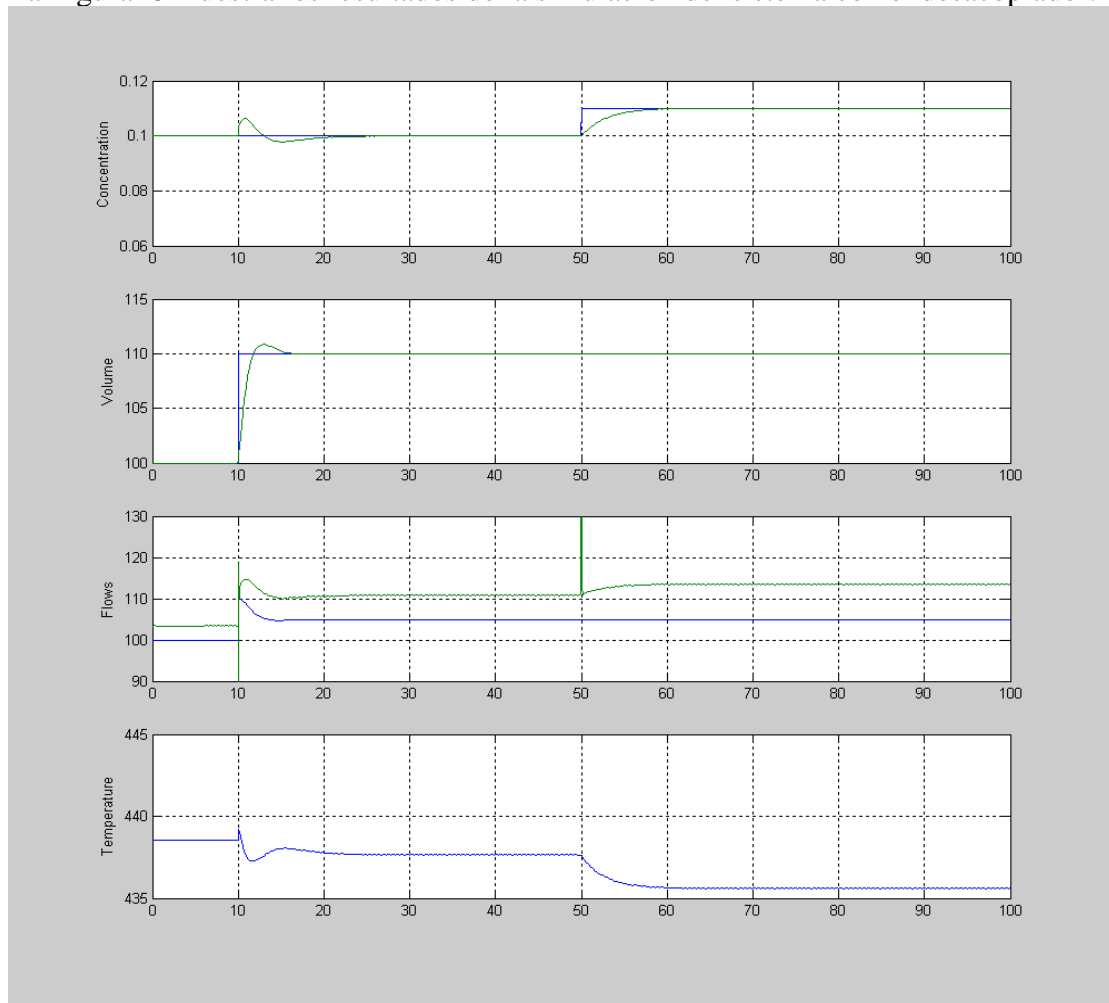


Figura 6 Resultados de la simulación del sistema desacoplado y controlado con PIDs

En este punto le sugiero que haga lo siguiente:

- 1) Reproduzca cuidadosamente los resultados y analice en detalle el diseño del desacoplador. Observe que el problema requiere un manejo especial. Si no comprende este manejo. Pregunte!!!
- 2) Experimente cambiando los parámetros de los PID en el archivo `CSTRDeCoupledPID.mdl` antes de correr esta simulación debe ejecutar el archivo `cstrinit.m` para inicializar los parámetros del simulador.
- 3) Trate de hacer su propia sintonización (Estoy seguro que con un poco de esfuerzo podrá obtener algo mejor!!)
- 4) **PREGUNTE LO QUE NO ENTIENDA.** Recuerde que no es obligatorio hacer estos ejercicios ni rendir informe, lo importante es que pueda preparar su evaluación.

Diseño de un controlador Multivariable LQR

En nuestro ejemplo se pide controlar dos variables (Concentración y Volumen) con cero error de estado estacionario. Esta tarea exige que si queremos construir un controlador por realimentación de estado debamos extender el sistema de modo que incluya un par de integradores sobre las variables que deseamos controlar con cero error de estado estacionario. El sistema extendido tendrá la siguiente presentación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ca_{ref} \\ V_{ref} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + Du$$

donde el vector e representa la integral del error de seguimiento, definido como:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_{Ca}(t) \\ \dot{e}_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ca_{ref}(t) - Ca(t) \\ V_{ref}(t) - V(t) \end{bmatrix}$$

Usando esta nueva representación podremos calcular un controlador LQR si definimos las matrices de la función de costo:

$$J = \int_0^{\infty} \left[x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \right] dt$$

de la siguiente forma:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que todos los estados y las entradas tienen la misma penalización.

Obteniéndose una matriz de realimentación de estado con los siguientes valores:

$$K = \begin{bmatrix} 125.7877 & 0.7120 & 1.4577 & 0.0788 & -0.9969 \\ -173.4768 & -1.1591 & -0.0897 & -0.9969 & -0.0788 \end{bmatrix}$$

Las tres primeras columnas corresponden a la realimentación de los 3 estados "naturales" del sistema (Concentración, Temperatura y Volumen) (matriz K_s) los dos columnas restantes corresponden a la realimentación de las integrales de los errores de seguimiento (matriz K_I).

$$K_s = \begin{bmatrix} 125.7877 & 0.7120 & 1.4577 \\ -173.4768 & -1.1591 & -0.0897 \end{bmatrix}$$

$$K_I = \begin{bmatrix} 0.0788 & -0.9969 \\ -0.9969 & 0.0788 \end{bmatrix}$$

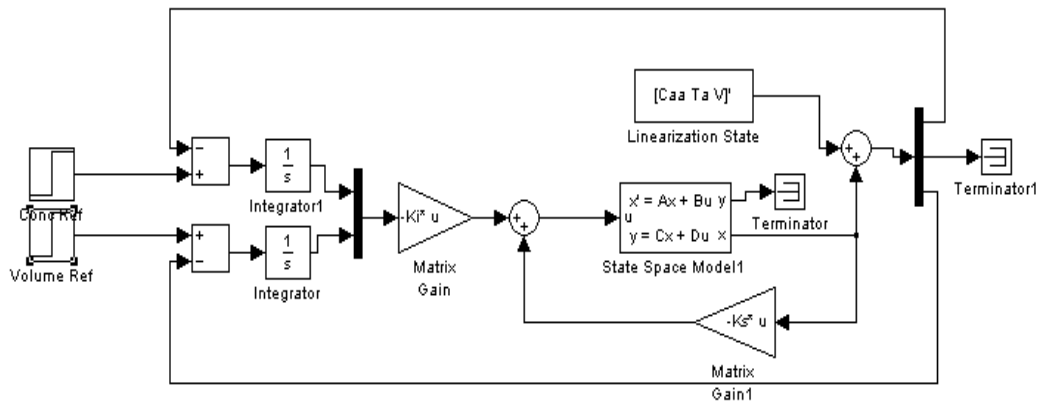


Figura 7 Diagrama de bloques de la simulación lineal del controlador LQR

Es conveniente realizar la sintonía del controlador usando el modelo lineal, una vez ajustado se puede montar el controlador sobre el modelo no-lineal. La Figura 7 muestra el diagrama de Simulink (CSTR_LQR_Lin.mdl) utilizado para probar el sistema. El resultado generado por este primer controlador (Figura 8) no satisface los requerimientos exigidos por las condiciones del problema.

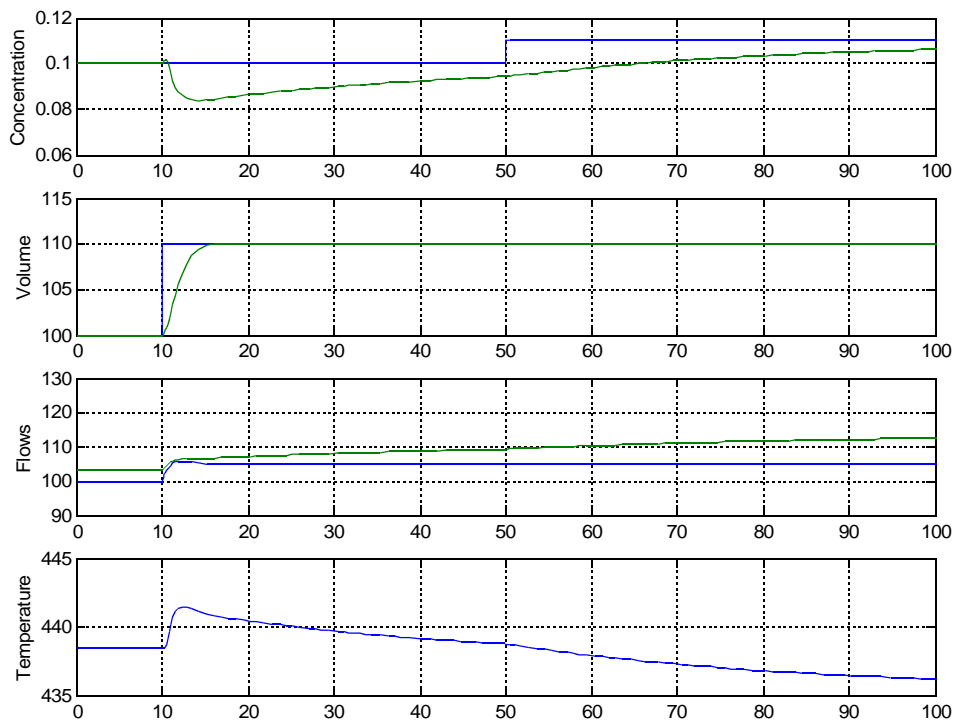


Figura 8 Respuesta del modelo lineal con controlador LQR ($Q=\text{diag}([1\ 1\ 1\ 1\ 1])$ $R=\text{diag}([1\ 1])$)

De la figura es claro que la respuesta de la concentración es particularmente lenta, de otro lado el control de volumen llena las expectativas que se requieren en el sistema. Intuitivamente podemos tomar dos acciones una penalizando la desviación de la

concentración (Ca) o penalizar la integral del error de concentración e_{Ca} . La idea es incrementar esta penalización, mientras mantenemos los valores de los flujos dentro de los límites permitidos por el sistema. Las siguientes gráficas muestran el efecto del cambio en la penalización de la integral del error de concentración.

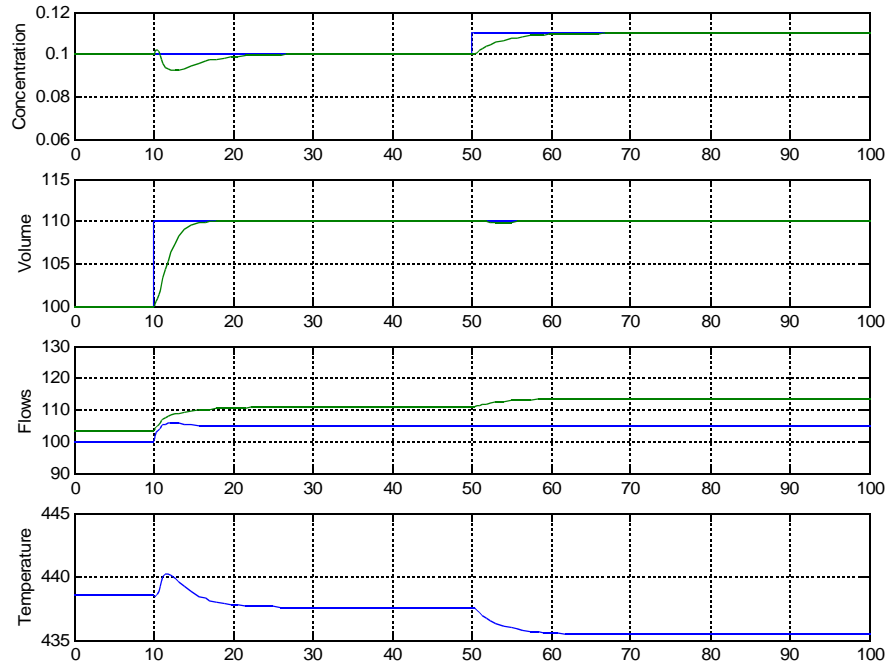


Figura 9 Respuesta del modelo lineal con controlador LQR ($Q=\text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1e4 \ 1])$ $R=\text{diag}([1 \ 1])$)

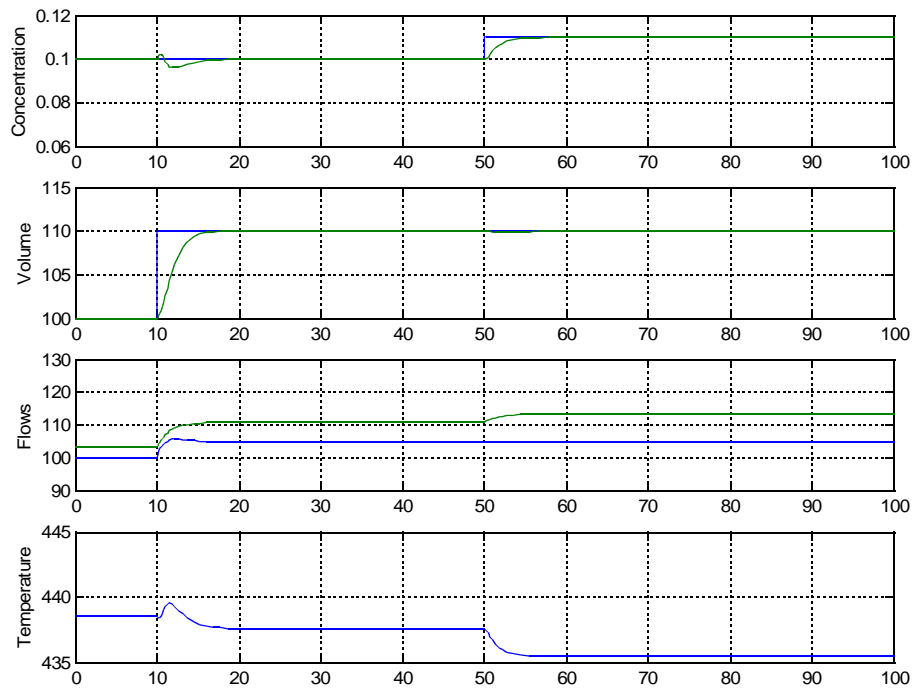


Figura 10 Respuesta del modelo lineal con controlador LQR ($Q=\text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 50000 \ 1])$
 $R=\text{diag}([1 \ 1])$)

Observe que finalmente con las matrices de costo:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el sistema cumple con las especificaciones de control deseadas. Generando unas matrices de realimentación de la forma:

$$K = \begin{bmatrix} 153.5413 & 0.9292 & 1.4970 & 58.0275 & -0.9657 \\ -257.9776 & -1.8432 & -0.1256 & -215.9463 & -0.2595 \end{bmatrix}$$

Que queda distribuida entre la realimentación de los estados originales y los de la integral del error así:

$$K_s = \begin{bmatrix} 153.5413 & 0.9292 & 1.4970 \\ -257.9776 & -1.8432 & -0.1256 \end{bmatrix}$$

$$K_I = \begin{bmatrix} 58.0275 & -0.9657 \\ -215.9463 & -0.2595 \end{bmatrix}$$

Finalmente verificaremos el funcionamiento del sistema conectando las matrices de realimentación al sistema lineal original de acuerdo con el diagrama mostrado en la Figura 11 (CSTR_LQR.mdl)

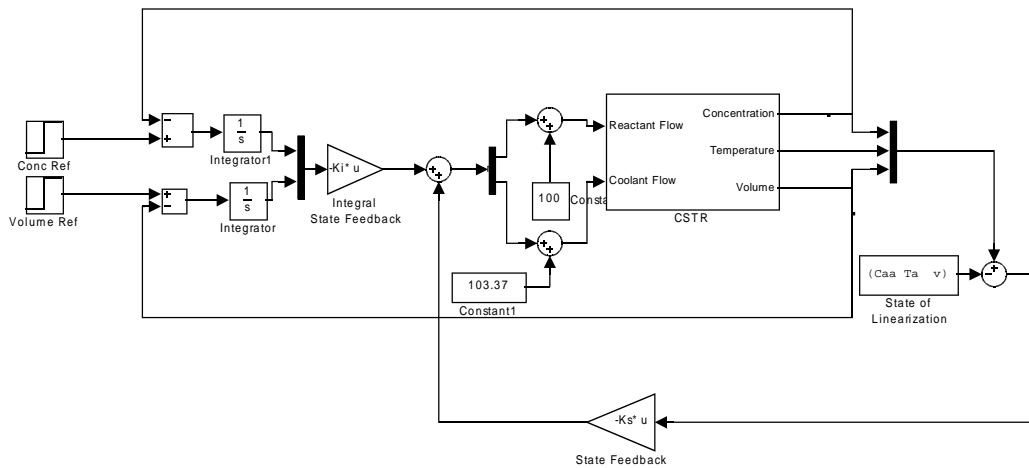


Figura 11 Diagrama de simulación del controlador LQR con la planta no lineal

El desempeño del sistema es bastante similar al observado con el sistema lineal como lo muestra la Figura 12. Observe que el controlador realiza automáticamente la labor de desacoplamiento reduciendo el impacto producido por los cambios en la referencia de variables distintas.

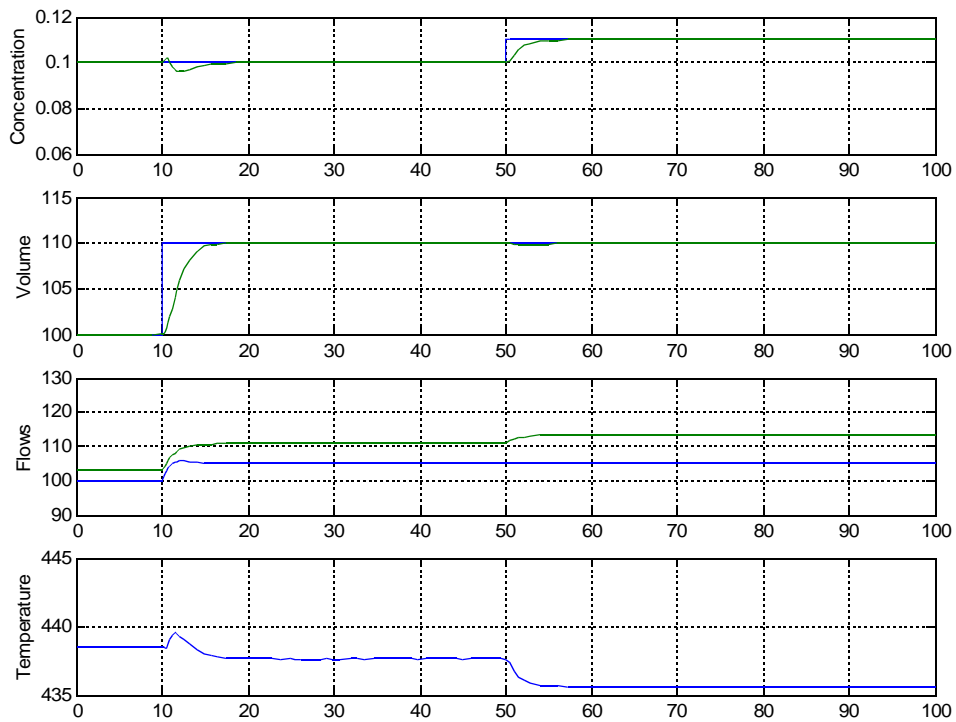


Figura 12 Desempeño del sistema no lineal con el controlador LQR

En este punto le sugiero que haga lo siguiente:

- 1) Reproduzca cuidadosamente los resultados y analice en detalle el diseño del controlador, especialmente la implementación y el uso de los integradores así como los ajustes donde se adiciona o restan los valores de referencia de linealización.
- 2) Experimente cambiando los parámetros Q y R y recalculé distintas realimentaciones de estado, realice la implementación en CSTRLQRLin y analice los tiempos de establecimiento.
- 3) PREGUNTE LO QUE NO ENTIENDA. Recuerde que no es obligatorio hacer estos ejercicios ni rendir informe, lo importante es que pueda preparar su evaluación.

Diseño de un observador óptimo (Kalman Filter).

Para construir este observador asumimos que el ruido de medición de las salidas es:

$$v_{Ca} = 0.001 \text{ mol/l}$$

$$v_V = 11$$

y el "ruido en los estados"

$$w_{Ca} = 0.007 \text{ mol/l}$$

$$w_T = 4 \text{ Kelvin}$$

$$w_V = 1.5 \text{ litros}$$

Si asumimos dichos ruidos como no correlacionados, tendremos unas matrices de covarianza de la siguiente forma:

$$R_w = \mathcal{E}\{w(t)w(t)^T\} = \begin{bmatrix} w_{Ca}^2 & 0 & 0 \\ 0 & w_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & w_V^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.9 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 2.25 \end{bmatrix}$$

$$R_v = \mathcal{E}\{v(t)v(t)^T\} = \begin{bmatrix} v_{Ca}^2 & 0 \\ 0 & v_V^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 121 \end{bmatrix}$$

Ya que el ruido $w(t)$ se asume entrando a cada estado de manera individual, se puede decir que:

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La ganancia del observador se puede calcular, resolviendo la ecuación de Riccati o bien usando directamente la función `kalman` incluida en el toolbox de control de Matlab. Para utilizar la función `kalman` es necesario entregar a la rutina un sistema dinámico con la siguiente descripción:

$$\begin{aligned} A_k &= A & B_k &= [B \quad B_w] \\ C_k &= C & D_k &= [D \quad 0] \end{aligned}$$

el prototipo de la función es:

$$[KEST, L, P] = \text{KALMAN}(\text{SYS}, \text{QN}, \text{RN})$$

donde `KEST` es un sistema dinámico con el observador ya construido, `L` es la ganancia del observador y `P` la solución de la ecuación de Riccati. `SYS` es el sistema descrito por las matrices de la fórmula ($\text{SYS} = \text{SS}(\text{AK}, \text{BK}, \text{CK}, \text{DK})$), `QN` es R_w y `RN`

es R_v . Resolviendo obtenemos la matriz L que gobernará la dinámica del observador. En la Figura 13 se puede observar la conexión del observador de estado. Es importante resaltar que a la señal de salida se le ha adicionado un ruido de medición con varianza igual a la diagonal de R_v . El diagrama está en el archivo CSTRKALMAN.mdl. En la Figura 14 se puede observar el diagrama interno de la implementación del observador.

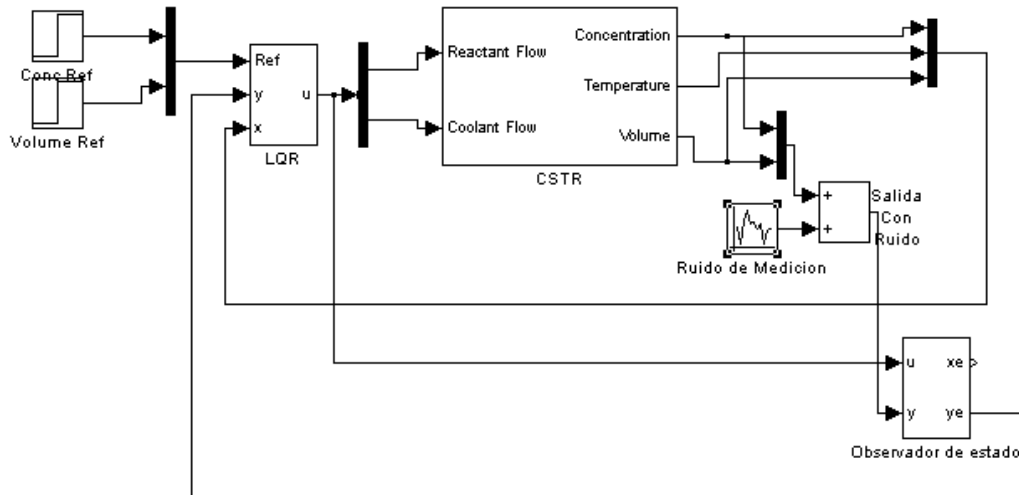


Figura 13 Conexión del Observador de estado al sistema con el controlador LQR

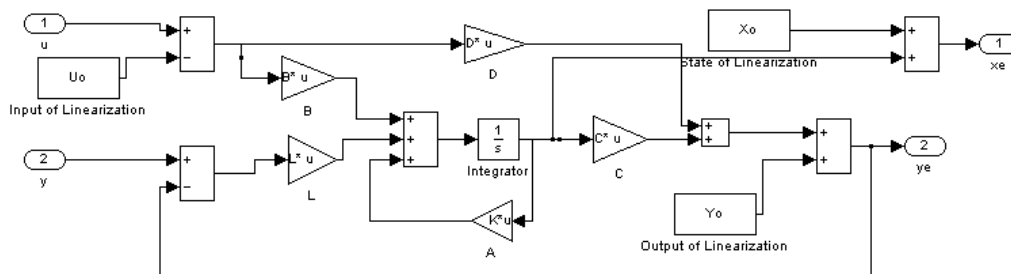


Figura 14 Diagrama interno del observador incluyendo las adaptaciones para el punto de operación

El desempeño del observador se puede apreciar en la siguiente figura donde se compara el estado original con el estado estimado. Observe que a pesar de lo ruidosa de la señal de salida con el ruido de medición el sistema es capaz de hacer una estimación bastante "limpia" de los estados.

En este punto le sugiero que haga lo siguiente:

- 1) Reproduzca cuidadosamente los resultados y analice en detalle el diseño del observador, especialmente la implementación y los ajustes donde se adiciona o restan los valores de referencia de linealización.

2) PREGUNTE LO QUE NO ENTIENDA. Recuerde que no es obligatorio hacer estos ejercicios ni rendir informe, lo importante es que pueda preparar su evaluación.

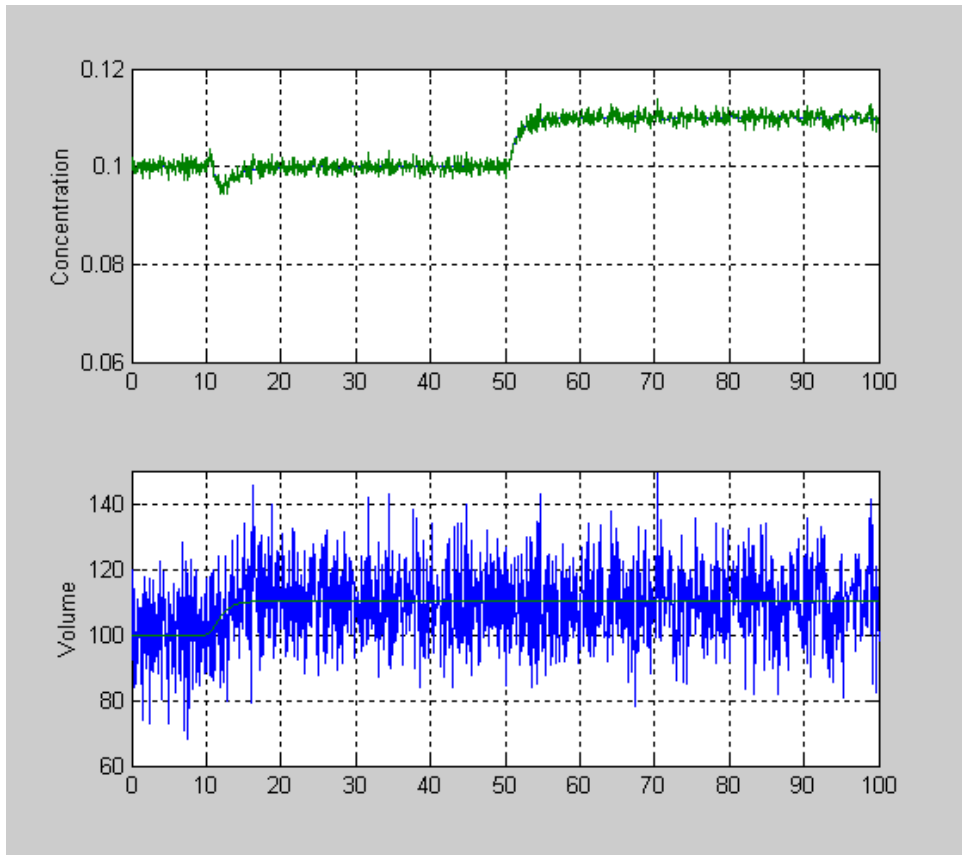


Figura 15 Señales medidas incluyendo el ruido de medición

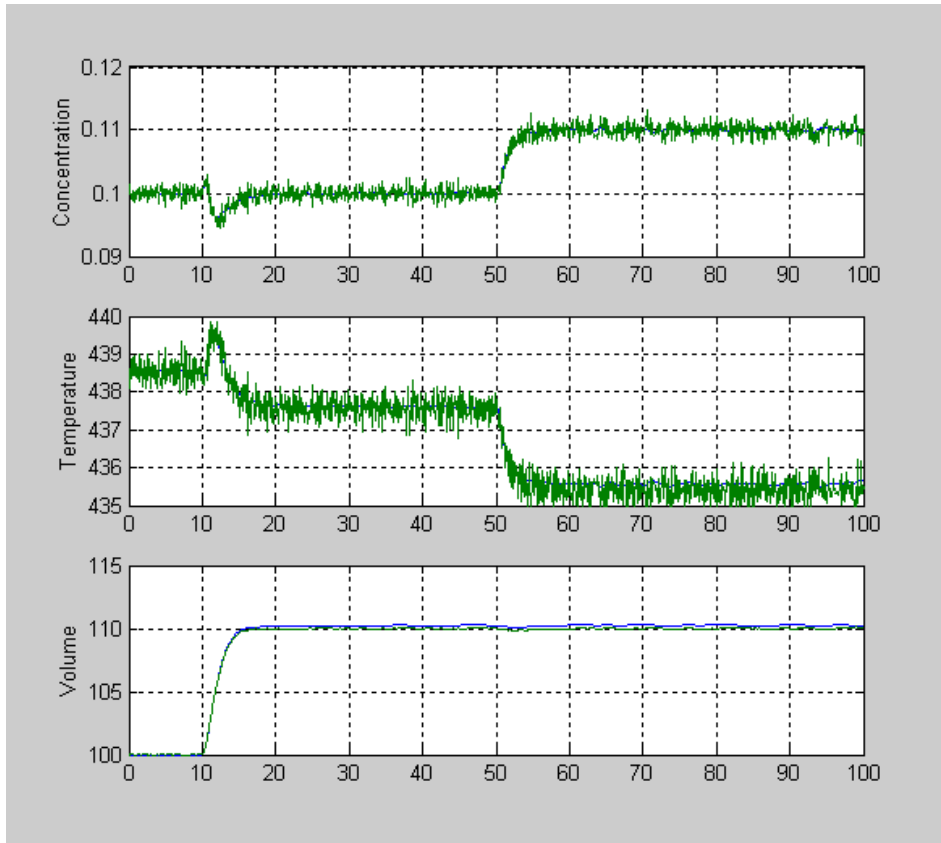


Figura 16 Estados estimados. Observe la apreciable reducción en la amplitud del ruido en las señales Concentración y Volumen comparados con las señales medidas.

Controlador Cuadrático Gaussiano (LQG)

En esta fase no nos resta sino cerrar el lazo de control de manera que conectemos el controlador LQR al observador. La conexión se puede hacer de dos maneras,

1. una es conectar al LQR las señales de salida (y) directamente y conectar los estados entregados por el observador (CSTR_LQG2.mdl).
2. la otra manera es conectar el LQR a las señales de salida (y_e) del observador y conectar los estados entregados por el observador (CSTR_LQG1.mdl).

El desempeño de ambas opciones es diferente como se muestra en las siguientes figuras.

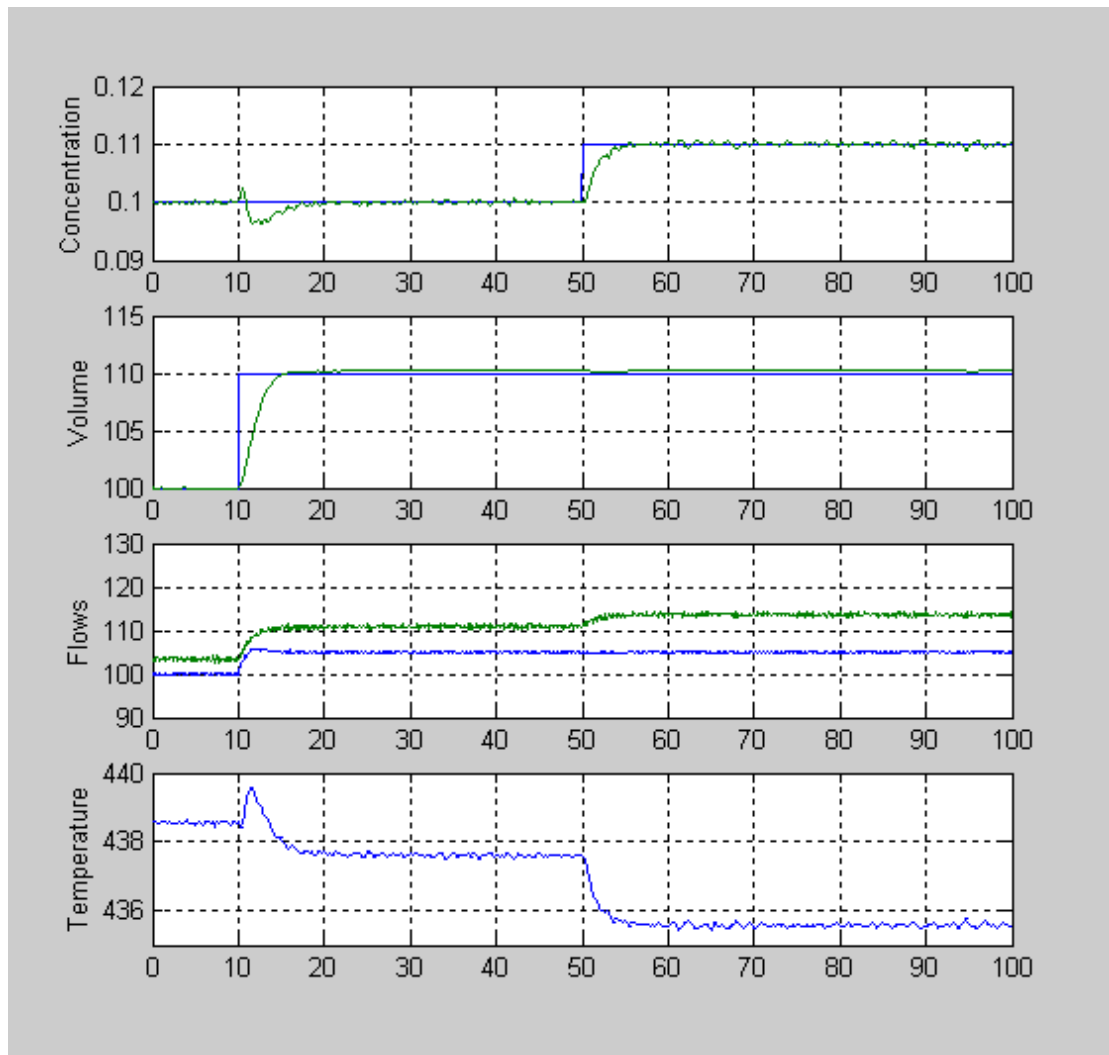


Figura 17 Desempeño del sistema con controlador LQG y realimentación de la salida estimada.

En este punto le sugiero que haga lo siguiente:

- 1) Reproduzca cuidadosamente los resultados y analice en detalle las diferencias entre las dos conexiones
- 2) Reduzca los dos bloques de controlador y observador a un bloque único eliminando posibles ajustes de nivel que sean redundantes.
- 3) Repase los pasos que tomo para completar este diseño.
- 4) Compare sus resultados con el sistema que utilizo unicamente PID y PID con desacoplador
- 5) Cual considera ud. es más fácil de diseñar.
- 6) **PREGUNTE LO QUE NO ENTIENDA.** Recuerde que no es obligatorio hacer estos ejercicios ni rendir informe, lo importante es que pueda preparar su evaluación.

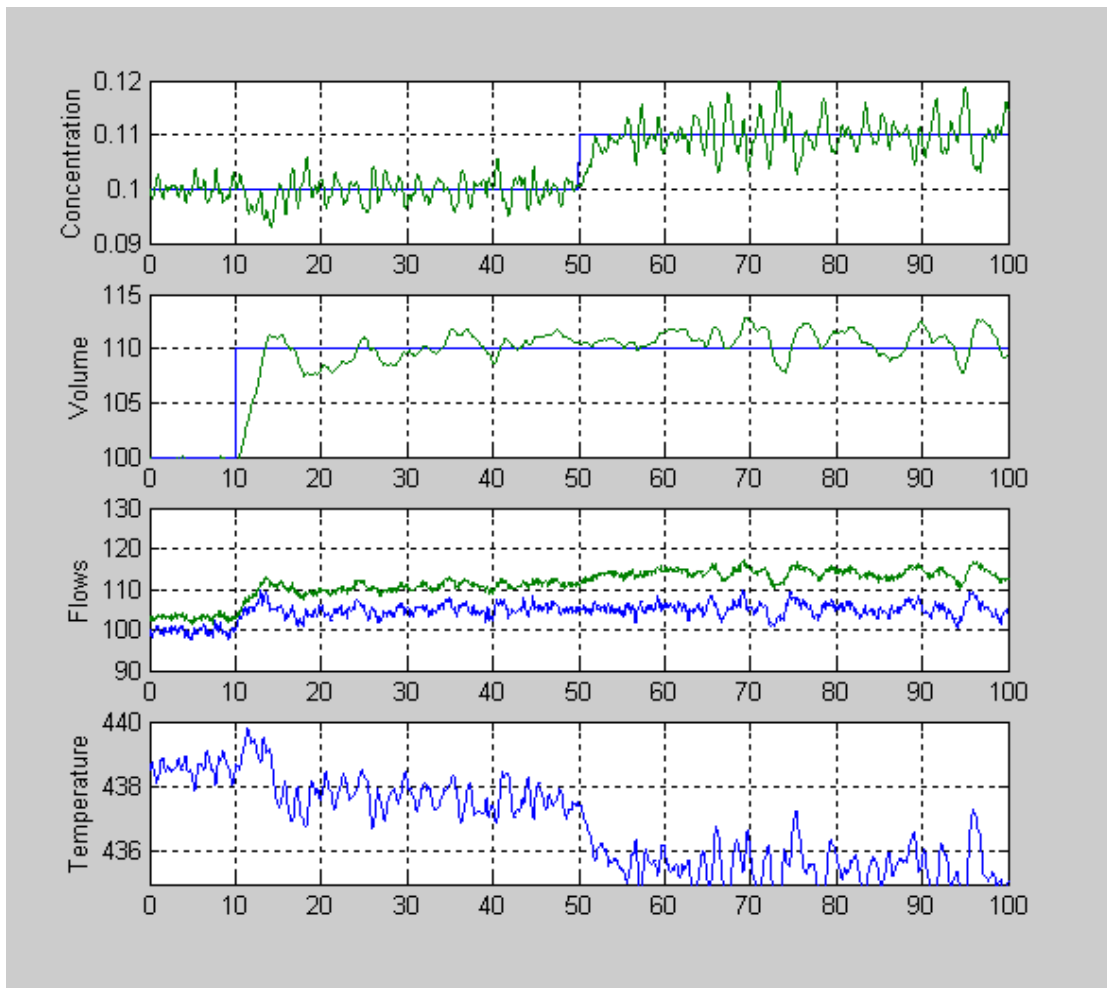


Figura 18 Desempeño del sistema con controlador LQG y realimentación de la salida medida.